الرياضيات

7

# التحليل (5)

السنة: الثالثة

الفصل: الثاني

الدكتور: نايف طلي

18

و الأخيرة

| P L U S | القسم: رياضيات | السنة: الثالثة | المحاضرة : 18والأخيرة | P L U S |
|---|---|---|---|---|
| | المادة: تحليل5 | الدكتور: نايف طلي | التاريخ: 14/ 5 /2019 | |

**اخذنا بالمحاضرة السابقة التوابع القيوسة والتابع الدرجي المميز وتعريف تكامل لوبيغ وسنكمل بهذه المحاضرة بتمارين عن تكامل لوبيغ وبعض التمارين من البحث الأخير**

## تمرين:

اكتب التابع البسيط التالي $f(x)$ على شكل تركيب خطي للتابع الدرجي:

$$f(x)=\begin{cases}0 & ; x\in[0,1[\\ 1 & ; x\in[1,2[\\ 2 & ; x\in[2,3[\\ 3 & ; x=3\end{cases}$$

## الحل:

$$f(x)=0\chi_{[0,1[}(x)+1\chi_{[1,2[}(x)+2\chi_{[2,3[}(x)+3\chi_{[3,3]}(x)$$

---

## تذكرة: تكامل لوبيغ:

اذا كان $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاءً قيوساً. وكان $f$تابع بسيط مجموعة قيمه $C_i$

نعرّف تكامل لوبيغ للتابع $f$ البسيط على $X$ بالنسبة للقياس $\mu$ بالشكل التالي:

$$\int_X f\,d\mu=\sum_{i=1}^{n} C_i\,\mu(A_i)$$

حيث: $\{C_i\}$ مجموعة قيم التابع البسيط $f$

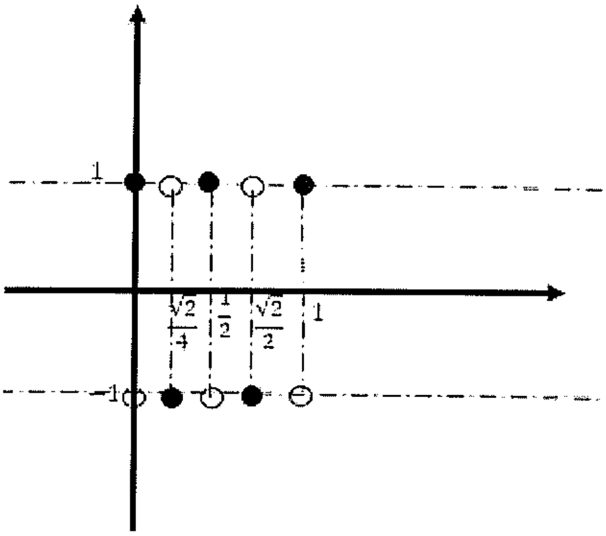
$A_i$ تشكل تجزئة لـ $X$ حيث : $X=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

$$A_i\cap A_j=\phi\quad ; i\neq j$$

# تمرين1:

احسب التكامل:

$$\int_{[0,1]} f\, d\mu \quad , \quad f(x) = \begin{cases} -1 & ; x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & ; x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$



# الحل:

$$X = [0,1]$$

$$A_1 = \mathbb{Q} \cap [0,1]$$

$$A_2 = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$$

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

$$X = A_1 \cup A_2$$

عدودة $\mathbb{Q}$ كون $\Rightarrow \mathbb{Q} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x_i\}$

$$\mu(\mathbb{Q}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu[x_i, x_i] = 0$$

$$\mu([0,1] \setminus \mathbb{Q}) = \mu([0,1] - \mu(\mathbb{Q}) = 1 - 0 = 1$$

$$\int_{[0,1]} f\, d\mu = 1\mu(A_1) - 1\mu(A_2) = 1 \times 0 - 1 \times 1 = -1$$

# ملاحظة:

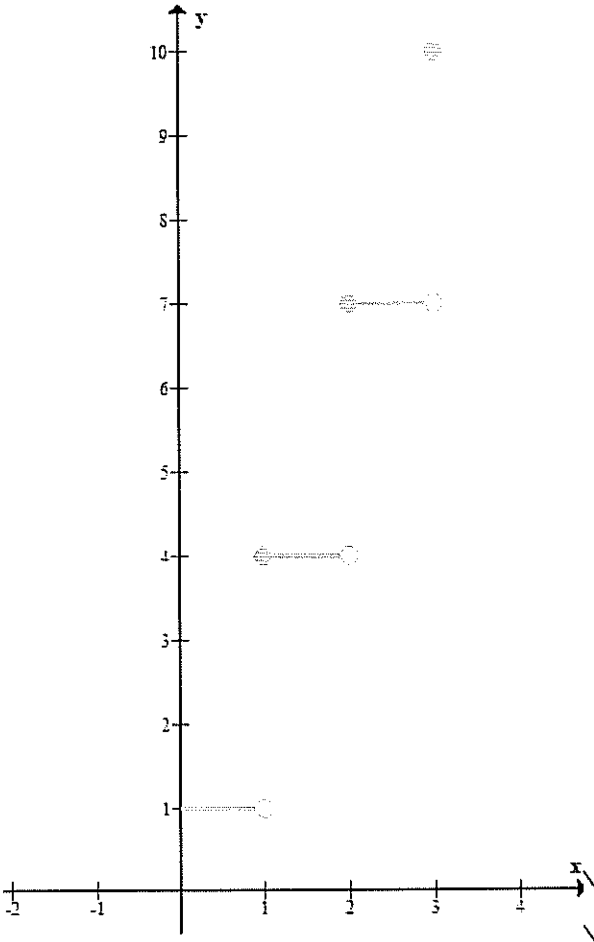
$[0,1] \subseteq \mathbb{Q}$ أي أننا نأخذ عناصر $\mathbb{Q}$ الموجودة بالمجال $[0,1]$

## تمرين2:

احسب التكامل:

$$\int_{[0,3]} f\,d\mu \quad , \quad f(x) = 3[x] + 1$$

## الحل:




$$[x] = \begin{cases} 0 \ ; x \in [0,1[ \\ 1 \ ; x \in [1,2[ \\ 2 \ ; x \in [2,3[ \\ 3 \ ; x = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ ; x \in [0,1[ \\ 4 \ ; x \in [1,2[ \\ 7 \ ; x \in [2,3[ \\ 10 \ ; x = 3 \end{cases}$$

$$\int_{[0,3]} f\,d\mu = 1\mu([0,1[) + 4\mu([1,2[) + 7\mu([2,3[)$$

$$+ 10\mu([3,3])$$

$$= 1 + 4 + 7 + 0 = 12$$

---

**تمرين3:** احسب التكامل:

$$\int_{[-3,3]} sign\,(\cos\pi x)\ d\mu \qquad ; sign\,(\omega) = \begin{cases} -1\,; \omega < 0 \\ 0 \ ; \omega = 0 \\ 1 \ ; \omega > 0 \end{cases}$$

حيث أن $sing\ (\omega)$ هو تابع الأشارة

## الحل:

بداية لندس اشارة المقدار $g(x) = \cos\pi x$

حتى نوجد تجزئة مناسبة للمجال $[-3,3]$

لنرسم الدالة:

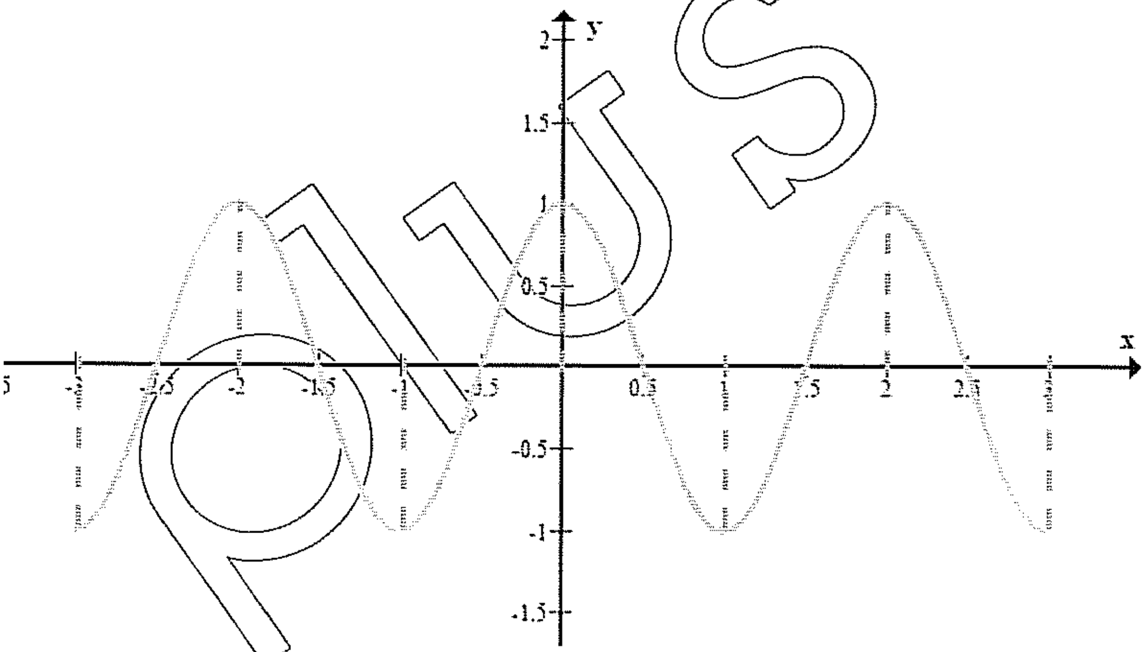
قبل الرسم لنوجد أصفار الدالة:

$$\cos\pi x = 0 \Rightarrow \pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x = \frac{1}{2} + k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k=-3 \Rightarrow x=-\frac{5}{2} \\ k=-2 \Rightarrow x=-\frac{3}{2} \\ k=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \\ k=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \\ k=1 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \\ k=2 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \end{cases}$$

**ملاحظة:**

لم نأخذ $k=3$ لأن القيمة الناتجة تكون خارج المجال وكذلك بالنسبة لـ $k=-4$




ولنأخذ تجزئة بحيث نقسم المجال الى 3 مجموعات بحيث تحقق أن $\cos \pi x$ بأول مجموعة أكبر من الصفر وفي المجموعة القانية يساوي الصفر وفي المجموعة الثالثة أصغر من الصفر وذلك من الرسم أيضاً:

$$A_1 = \left[-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right[ \bigcup \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[ \bigcup \left]\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right[$$

$$A_2 = \left\{-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$$

$$A_3 = \left[-3, -\frac{5}{2}\right[ \bigcup \left]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right[ \bigcup \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[ \bigcup \left]\frac{5}{2}, 3\right[$$

بحيث أن $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset \;,\; A_1 \cup A_2 \cup A_3 = [-3,3]$

نلاحظ أن المجموعات منفصلة مثنى مثنى

ملاحظة: قياس مجموعة لا يمكن أن يكون سالب

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset$$
$$A_1 \cap A_3 = \emptyset$$
$$A_2 \cap A_3 = \emptyset$$

والآن لنأخذ قياس هذه المجموعات:

$$\mu(A_1) = 1 + 1 + 1 = 3$$
$$\mu(A_2) = 0$$
$$\mu(A_3) = \frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2} = 3$$

ومنه تكامل لوبيغ:

$$\int_{[-3,3]} sign\,(\cos \pi x)\ d\mu = 1 \times 3 + 0 \times 0 - 1 \times 3 = 0$$

---

## تمرين من البحث الأول:

**$f$ معرفة على $[0,1]$ كما يلي:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{\pi}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

**المطلوب:1) بين أن $f$ مستمرة على $[0,1]$.**

**2) بين أن $f$ ذ.ت.م على $[0,1]$ مستخدماً معيار الاشتقاق.**

## الحل:

1) a) لنثبت أن $\forall x \in ]0,1[ : \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\lim_{\substack{> \\ x \to x_0 \\ <}} x^2 \sin\frac{\pi}{x} = x_0^2 \sin\frac{\pi}{x_0} = f(x_0)$$

b) $x_0 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} x^2 \sin\frac{\pi}{x} = 0 = f(0)$

حيث أن $\left|\sin\frac{\pi}{x}\right| \leq 1$ أي انها محدودة

c) $x_0 = 1 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 1}} x^2 \sin\frac{\pi}{x} = 0 = f(1)$

وبالتالي $f$ دالة مستمرة على $[0,1]$

2) يجب أن نثبت أن المشتق للدالة محدود:

$$f'(x) = 2x\sin\frac{\pi}{2} - \pi\cos\frac{\pi}{x}$$

$$|f'(x)| = \left|2x\sin\frac{\pi}{x} - \pi\cos\frac{\pi}{x}\right| \leq \left|2x\sin\frac{\pi}{2}\right| + \left|\pi\cos\frac{\pi}{x}\right|$$

$$|f'(x)| \leq 2 + \pi$$

أي أن المشتق محدود على $]0,1[$

$$x = 0 \Rightarrow f'(0+0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{x^2\sin\frac{\pi}{x} - 0}{x} = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow f'(1-0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{x^2\sin\frac{\pi}{x} - 0}{x - 1} = 0$$

المشتق موجود ومحدود $\Leftarrow f$ د.ت.م

---

**إلى هنا أصدقائي نكون قد انتهينا من مقررنا آملين أن نكون قد وفقنا في إيصال المعلومة بالشّكل الأفضل ونعتذر في حال وجد أخطاء فجلّ من لا يخطئ ونشكر تفهمكم إلى اللقاء في مقررات قادمة ☺**

# انتهى المقرر

Math Mad Team

إعداد: عبد الرحمن خادم الجامع، سمير الحاج علي.